ENSA d'Al-Hoceima
CP-II, 2ème année,
Algèbre Quadratique,

Année 2020/2021
Semestre 3
TD2

Solutions de la Série N^{o}2 : Réduction de matrices : Application à la résolution de systèmes différentiels

Exercice 1

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f un endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = e_3 \text{ et } f(e_3) = e_1.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f.
2. Décomposer $\mathbb{R}^3$ en une somme directe de sous-espaces vectoriels propres stables par f.

Solution : Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f un endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = e_3 \text{ et } f(e_3) = e_1.$$

1. Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f : la matrice de f relativement à la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ est
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
d'abord la matrice A est inversible car $\det(A) = 1 \neq 0$; et
   - le polynôme caractéristique de f est $P_f(x) = \det(A - xI_3)$, alors
   $$P_f(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 1 - x^3 = -(x-1)(x^2+x+1) = (1-x)R(x)$$
   où R est un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[x]$. L'endomorphisme f admet une seule valeurs propre réelle qui est 1.
   - Le polynôme minimal de f est un polynôme Q unitaire, divise le polynôme caractéristique P_f et vérifiant $Q(A)$ est la matrice nulle ; en effet, on a
   $$R(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0_{3\times 3} \quad \text{et} \quad A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0_{3\times 3}$$
   où $0_{3\times 3}$ est la matrice nulle de taille 3×3, donc
   $$(A - I_3)R(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3\times 3}$$
   ce qui prouve que le polynôme minimale de f est $Q(x) = (x-1)R(x) = x^3 - 1$.
2. La décomposition $\mathbb{R}^3$ en une somme directe de sous-espaces vectoriels propres stables par f : d'après la question 1, le polynôme caractéristique de f est $P_f(x) = (1-x)(x^2+x+1)$ où le polynôme x^2+x+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[x]$, alors le polynôme $P_f(x)$ ne se décompose pas complètement dans $\mathbb{R}[x]$, donc le seul sous-espace vectoriel propre inclu dans $\mathbb{R}^3$ est $E_1 = \mathrm{Ker}(f - 1.\mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$ qui le sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre 1 de f.
Il existe un sous-espace vectoriel F de dimension 2 défini par
$$F = \{y \in \mathbb{R}^3 \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\, \exists v_n \in \mathbb{R}^3 \ :\ (f - 1.\mathrm{id}_E)^n(v_n) = y\}$$
tel que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - 1.\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus F$.

- Montrons que F est stable par f :
  soit $u \in F$ et $n \in \mathbb{N}$, alors il existe $u_n \in \mathbb{R}^3$ telle que $(f - 1.\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^n(u_n) = u$;
  donc on a $(f - 1.\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^n(f(u_n)) = f(u)$, car $f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \circ f$ et $f \circ f^n = f^n \circ f$ c'est à dire que $f \circ (f - 1.\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^n = (f - 1.\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^n \circ f$.
  Il existe $v = f(u_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(f - 1.\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^n(v) = f(u)$; d'où $f(u) \in F$ c'est à dire $f(F) \subset F$.
- Montrons que $E_1 = \mathrm{Ker}(f - 1.\mathrm{id}_E)$ est stable par f :
  soit $u \in \mathrm{Ker}(f - 1.\mathrm{id}_E)$, alors il existe $(f - 1.\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0_3$;
  donc on a $(f - 1.\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(f(u)) = f(0_3) = 0_3$, car $f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \circ f$ et $f \circ f^n = f^n \circ f$.
  Il existe $v = f(u) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(f - 1.\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = 0_3$; d'où $v = f(u) \in F$ c'est à dire $f(E_1) \subset F$.

$\square$

Exercice 2
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose que la matrice A a une seule valeur propre double λ.

1. Montrer qu'on peut trouver une matrice B semblable à A égale à l'une des deux matrices suivantes : $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
2. Calculer B^n.

Solution : Considérons une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose que la matrice A a une seule valeur propre double λ, c'est à dire $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}\cdot$

1. Montrons qu'on peut trouver une matrice B semblable à A égale à l'une des deux matrices suivantes : $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
   λ est l'unique valeur propre de A, alors il existe au moins un vecteur propre v de A associé à la valeur propre λ, donc $A\,v = \lambda\,v$.
   En prenant une nouvelle base formée de V et d'un autre vecteur w, alors on peut poser P la matrice $P = (v|w)$ avec $P = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ vérifiant
   $$T = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$
   où $Av = \lambda v$ et $Aw = \lambda w + v$. Alors deux cas se produisent
   – Si w est un autre vecteur propre de A associé à λ, alors $Aw = \lambda w$, donc $\{v; w\}$ est une base formée de vecteurs propres, dans ce cas $c = 0$ et donc la matrice A est diagonalisable et ensuite on obtient
   $$B = T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$
   – Si w n'est pas un vecteur propre de A (soit $c \neq 0$) , alors en remplaçant w par kw on obtient $A(kw) = \lambda w + (kc)v$, donc il suffit de prendre $kc = 1$ soit $k = \frac{1}{c}$, d'où la matrice A n'est pas diagonalisable et ensuite elle trigonalisable au sens de Jordan, on obtient
   $$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \widetilde{P}^{-1}A\widetilde{P}$$
   où $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} v_1 & \frac{1}{c}w_1 \\ v_2 & \frac{1}{c}w_2 \end{pmatrix}$
2. Calculons B^n :
   (a) Si $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, alors $B = \lambda I_3$; donc $B^n = \lambda^n I_3$.

(b) Si $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, alors $B = \lambda I_3 + N$ où N est une matrice nilpotente d'indice de nilpotence 2 à savoir N^p est la matrice nulle pour tout $p \geq 2$; alors d'après la formule de Newton, on a

$$B^n = (\lambda I_3 + N)^n = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i \lambda^{n-i} N^i = \mathrm{C}_n^0 \lambda^{n-0} I_2 + \mathrm{C}_n^1 \lambda^{n-1} N + \sum_{i=2}^{n} \mathrm{C}_n^i \lambda^{n-i} N^i$$

or $N^p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout $p \geq 2$, alors

$$B^n = \lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1} N = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $B^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

□

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est triangulaire supérieure.
4. Calculer $(A - 2I_3)^2$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : Considérons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Le polynôme caractéristique de A est par définition $P_A(x) = \det(A - xI_3)$

$$\begin{aligned} \det(A - xI_3) &= \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ -4 & 4-x & 0 \\ -2 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= -x \begin{vmatrix} 4-x & 0 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= -x(4-x)(2-x) + 4(2-x) \\ &= (2-x)(-x(4-x) + 4) \end{aligned}$$

d'où $P_A(x) = -(x-2)^3$.

– La matrice A admet une seule valeur propre d'ordre de multiplicité 3.

– les vecteurs propres de A : soit $u = (x, y, z)^T$ un vecteur propre de A associé à $\lambda = 2$, alors $A\,u = 2\,u$, donc

$$\begin{cases} y = 2x \\ -4x + 4y = 2y \\ x + y + 2z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 2x \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

alors

$$u = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on pose $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; alors le sous-espace propre $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ de A associé à la valeur propre 2 est engendré par le système $\{v_1; v_2\}$; donc la matrice A n'est pas diagonalisable ; d'où A est trigonalisable.

2. La matrice A n'est pas diagonalisable, alors l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
3. D'après la question 1, on a le sous-espace propre $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ de A associé à la valeur propre 2 est engendré par le système $\{v_1; v_2\}$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors le système $\{v_1; v_2\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$; donc d'après le théorème de la base incomplète on peut déterminer un troisième vecteur v_3 vérifiant $Av_3 = 2v_3 + v_1$ tel que le système $\{v_1; v_2; v_3\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ce vecteur, alors on peut écrire la matrice $P = (v_1|v_2|v_3)$ telle que

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}$$

alors on a $PT = AP$ qui implique

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a+2x \\ 4 & 0 & 2a+2y \\ 0 & 2 & b+2z \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & y \\ 4 & 0 & -4x+4y \\ 0 & 2 & -2x+y+2z \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} a + 2x = y \\ 2a + 2y = -4x + 4y \\ b + 2z = -2x + y + 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2x = y \\ b + 2x = y \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a + 2x = y \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on prend $x = 0$, $a = b = 1$ et $z = 0$ alors $y = 1$; donc

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et après vérification on obtient

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T$$

4. On a

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après la question 3, on a $T = P^{-1}AP$ avec $T = 2I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente d'indice de nilpotence 2 ; soit $N^p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout $p \geq 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $T^n = (2I_3 + N)^n = P^{-1}A^nP$ avec $(2I_3 + N)^n = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i 2^{n-i} N^i$ car $NI_3 = I_3N$, alors

$$(2I_3 + N)^n = \mathrm{C}_n^0 2^n I_3 + \mathrm{C}_n^1 2^{n-1} N = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n\,2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n\,2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

donc

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n\,2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n\,2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $A^n = \begin{pmatrix} -(n-1)2^n & n2^{n-1} & 0 \\ -n2^{n+1} & (n+1)2^n & 0 \\ -n2^n & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$.

<u>Vérification :</u>

pour $n = 1$, alors $A^1 = \begin{pmatrix} -(1-1)2^1 & 1 * 2^{1-1} & 0 \\ -1 * 2^{1+1} & (1+1)2^1 & 0 \\ -1 * 2^1 & 1 * 2^{1-1} & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A.$

□

Exercice 4

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est triangulaire supérieure.
4. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Le polynôme caractéristique de A est par définition $P_A(x) = \det(A - xI_3)$

$$\begin{aligned} \det(A - xI_3) &= \begin{vmatrix} 3-x & -1 & -1 \\ -1 & 2-x & 0 \\ 3 & -2 & -x \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} -1 & 2-x \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ -1 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= -(3x-4) - x(x^2 - 5x + 5) \\ &= -x^3 + 5x^2 - 8x + 4 \end{aligned}$$

d'où $P_A(x) = -(x-1)(x-2)^2$.

La matrice A a pour valeur propre 1 d'ordre de multiplicité 1 et 2 d'ordre de multiplicité 2. les vecteurs propres de A :

– soit $u = (x, y, z)^T$ un vecteur propre de A associé à $\lambda = 1$, alors $A\,u = 1\,u$, donc

$$\begin{cases} 3x - y - z = x \\ -x + 2y = y \\ 3x - 2y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x = y \\ x = z \end{cases}$$

alors

$$u = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc on prend $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le sous-espace propre $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ de A associé à la valeur propre 1 est la droite vectorielle de vecteur directeur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

– soit $v = (x, y, z)^T$ un vecteur propre de A associé à $\lambda = 2$, alors $A\,u = 2\,u$, donc

$$\begin{cases} 3x - y - z = 2x \\ -x + 2y = 2y \\ 3x - 2y = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

alors

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc on prend $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Le sous-espace propre $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ de A associé à la valeur propre 2 est la droite vectorielle de vecteur directeur $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On remarque que le sous-espace vectoriel $E = E_1 \oplus E_2 = \mathrm{Ker}(A - I_3) \oplus \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ est engendré par le système $\{u_1; v_1\}$; donc l'espace vectoriel E est de dimension 2 qui est strictement inférieure à la dimension de $\mathbb{R}^3$; donc la matrice A n'est pas diagonalisable ; d'où A est trigonalisable.

2. L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car la matrice A de f n'est pas diagonalisable. D'où l'endomorphisme f n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
3. D'après la question 1, on a le sous-espace vectoriel $E = E_1 \oplus E_2 = \mathrm{Ker}(A - I_3) \oplus \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ est engendré par le système $\{u_1; v_1\}$ où $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors le système $\{u_1; v_1\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$; donc d'après le théorème de la base incomplète on peut déterminer un troisième vecteur w_1 vérifiant $Aw_1 = 2w_1 + v_1$ tel que le système $\{u_1; v_1; w_1\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $w_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur tel que $Aw_1 = 2w_1 + v_1$, alors on a

$$\begin{cases} 3x - y - z = 2x \\ -x + 2y = 2y + 1 \\ 3x - 2y = 2z - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + z \\ x = -1 \end{cases}$$

on prend $y = 1$, alors $z = -2$ et $x = -1$, donc $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Finalement, le système $\{u_1; v_1; w_1\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.

Soit $P = (u_1|v_1|w_1)$ la matrice formée de vecteurs propres en colonnes, alors

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice P est inversible et on obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie bien que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J$$

4. On a $P^{-1}AP = J$ avec $J = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On vérifie que

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$$

   alors d'après la formule de Newton on a $J^n = (D+N)^n = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i N^i D^{n-i}$.

   Or la matrice N est nilpotente d'indice de nilpotence 2, alors N^p est la matrice nulle pour tout $p \geq 2$; donc

$$P^{-1}A^nP = J^n = D^n + nD^{n-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

   d'où

$$A^n = PJ^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   finalement

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 1-2^n & 1-2^n \\ -1+(1-n)2^n & 1+n2^{n-1} & 1-n2^{n-1} \\ -1+(n+1)2^n & 1-(n+2)2^{n-1} & 1-n2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

   <u>Vérification :</u> pour $n = 1$, on retrouve la matrice A en remplaçant $n = 1$ dans l'expression de A^n.

□

Exercice 5

On considère les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sous la forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + v_n - 3w_n \\ v_{n+1} &= u_n - w_n \\ w_{n+1} &= u_n - v_n \end{cases}$$

1. Écrire le système (S) sous la forme matricielle

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Calculer les valeurs propres de A. En déduire que la matrice A est diagonalisable. Proposer une base de vecteurs propres de A.
3. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une basee de vecteurs propres de A. Calculer P et P^{-1}, puis expliciter la matrice $B \in \mathbb{R}^{(3\times 3)}$ définie par $B = P^{-1}AP$.
4. Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.
5. En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Solution : Considérons les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sous la forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & u_n + 6v_n - 3w_n \\ v_{n+1} & = & u_n - w_n \\ w_{n+1} & = & u_n - v_n \end{array} \right.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, alors le système (S) peut être transformer sous la forme matricielle

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. – Le polynôme caractéristique de A est par définition $P_A(x) = \det(A - xI_3)$

$$\begin{array}{rcl} \det(A - xI_3) & = & \begin{vmatrix} 1-x & 6 & -3 \\ 1 & -x & -1 \\ 1 & -1 & -x \end{vmatrix} \\ & = & (1-x)(x^2-1) - 6(1-x) - 3(x-1) \\ & = & (1-x)(x^2 - 1 - 6 + 3) \\ & = & (1-x)(x^2-4) \end{array}$$

d'où $P_A(x) = -(x-1)(x-2)(x+2)$.
Les valeurs propres de A sont telles que $P_A(x) = -(x-1)(x-2)(x+2) = 0$, alors le spectre de A est $\mathrm{Sp}(A) = \{-2; 1; 2\}\cdot$

– La matrice A est d'orde 3 qui admet trois valeurs propres distinctes ; alors on en déduit que la matrice A est diagonalisable.

– Une base de vecteurs propres de A :

• Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre -2, alors on a $A\,u = -2\,u$, soit

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 6y - 3z = -2x \\ x - z = -2y \\ x - y = -2z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + 6y - 3z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = -x \\ z = -x \end{array} \right.$$

on prend $x = 1$, alors $y = -1$ et $y = -1$, donc $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. D'où le sous-espace propre $E_{-2} = \mathrm{Ker}(A + 2I_3)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, alors on a $A\,u = u$, soit
$$\left\{\begin{array}{l} x+6y-3z = x \\ x-z = y \\ x-y = z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 2y \end{array}\right.$$
on prend $y = 1$, alors $x = 3$ et $z = 2$, donc $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. D'où le sous-espace propre $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Soit $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2, alors on a $A\,u = 2\,u$, soit
$$\left\{\begin{array}{l} x+6y-3z = 2x \\ x-z = 2y \\ x-y = 2z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-6y+3z = 0 \\ x-2y-z = 0 \\ x-y-2z = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3y \\ y \in \mathbb{R} \\ y = z \end{array}\right.$$
on prend $y = 1$, alors $x = 3$ et $z = 1$, donc $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où le sous-espace propre $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que le système $\{u_1; v_1, w_1\}$ formé des vecteurs propres est une base de $\mathbb{R}^3$; donc $\mathbb{R}^3$ est la somme directe des sous-espaces propres, c'est à dire
$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(A + 2I_3) \oplus \mathrm{Ker}(A - I_3) \oplus \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$$
ce qui montre que A est diagonalisable.

3. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une basee de vecteurs propres de A, alors $P = (u_1|v_1|w_1)$ c'est à dire
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
on peut voir que P est inversible puisque son déterminant $\det(P) = -4 \neq 0$; alors
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -1 \end{pmatrix}$$
La matrice A est diagonalisable, alors il existe une matrice $B \in \mathbb{R}^{(3\times3)}$ diagonale dont la diagonale est formée de vecteurs propres et définie par $B = P^{-1}AP$ où
$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Pour tout $n \geq 1$, on a $B^n = P^{-1}A^nP$; donc $A^n = PBP^{-1}$ où $B^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$;

   c'est à dire

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

   d'où pour tout $n \geq 1$ on obtient

$$A^n = \begin{pmatrix} (3+(-1)^n)2^{n-2} & (15-3(-1)^n)2^{n-2} - 3 & 3(1-2^n) \\ (1-(-1)^n)2^{n-2} & (5+3(-1)^n)2^{n-2} - 1 & 1-2^n \\ (1-(-1)^n)2^{n-2} & (5+3(-1)^n)2^{n-2} - 2 & 2-2^n \end{pmatrix}$$

   Pour $n = 1$, on peut retrouver facilement la matrice A.

5. Les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n, en effet, pour tout $n \geq 1$ on a $X_n = AX_{n-1}$, alors on obtient $X_n = A^nX_0$ où $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; alors

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3+(-1)^n)2^{n-2} & (15-3(-1)^n)2^{n-2} - 3 & 3(1-2^n) \\ (1-(-1)^n)2^{n-2} & (5+3(-1)^n)2^{n-2} - 1 & 1-2^n \\ (1-(-1)^n)2^{n-2} & (5+3(-1)^n)2^{n-2} - 2 & 2-2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   c'est à dire que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2^n + (18-2(-1)^n)2^{n-2} - 3 \\ 2^n + (6+2(-1)^n)2^{n-2} - 2 \\ 2^n + (6+2(-1)^n)2^{n-2} - 4 \end{pmatrix}$$

   finalement les expressions de u_n, v_n et w_n sont

$$\begin{cases} u_n = 3.2^n + (18-2(-1)^n)2^{n-2} - 6 \\ v_n = 2^n + (6+2(-1)^n)2^{n-2} - 2 \\ w_n = 2^n + (6+2(-1)^n)2^{n-2} - 4 \end{cases}$$

   on peut vérifier que pour $n = 0$ on retrouve $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et $w_0 = -1$

□

Exercice 6

On veut résoudre le système différentiel linéaire du premier ordre sans second membre suivant :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'on peut écrire le système différentiel sous la forme : $X'(t) = A.X(t)$ où A est une matrice à déterminer.
2. Montrer que la matrice est inversible, puis trouver le polynôme caractéristique associé à A.
3. Trouver les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de la matrice A.
4. Trouver les vecteurs propres v_1, v_2 et v_3 associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.

5. Trouver la solution générale $X(t)$, puis touver la solution $X(t)$ satisfaisant la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. Trouver la solution $t \longmapsto X(t)$ tel que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \\ \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}$ où $j = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

   Soient M, N et P des points dans le plan complexe d'afixes $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, le traingle MNP est-il équilatéral ?

Solution : Considérons le système différentiel linéaire du premier ordre sans second membre suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{array} \right.$$

1. Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, alors $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

   d'où on peut écrire le système différentiel sous la forme : $X'(t) = A.X(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. La matrice A est inversible puisque $\det(A) = 4 \neq 0$, et le polynôme caractéristique associé à A est par définition $P_A(x) = \det(A - xI_3)$

$$\begin{aligned} \det(A - xI_3) &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ -1 & 2-x & 1 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)^2(2-x) - (x-1-1) \\ &= (2-x)(1+(x-1)^2) \end{aligned}$$

   d'où $P_A(x) = -(x-2)(1+(x-1)^2)$.

3. Les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de la matrice A sont telles que $P_A(x) = -(x-2)(1+(x-1)^2) = 0$, alors $\lambda_1 = 2$, $\quad \lambda_2 = 1 - \mathrm{i}$ et $\quad \lambda_3 = 1 + \mathrm{i} = \overline{\lambda}_2$.

4. Les vecteurs propres v_1, v_2 et v_3 associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 - \mathrm{i}$ et $\lambda_3 = 1 + \mathrm{i} = \overline{\lambda}_2$:

   – Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2, alors on a $A\,u = 2\,u$, soit

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 2x \\ -x + 2y + z = 2y \\ x + z = 2z \end{array} \right. \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = x \\ z = x \end{array} \right.$$

   on prend $x = 1$, alors $y = 1$ et $z = 1$, donc $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où le sous-espace propre $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

– Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre $1-\mathrm{i}$, alors on a $A\,u = (1-\mathrm{i})\,u$, soit

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=(1-\mathrm{i})x \\ -x+2y+z=(1-\mathrm{i})y \\ x+z=(1-\mathrm{i})z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\mathrm{i}y \\ y\in\mathbb{R} \\ z=-y \end{array}\right.$$

on prend $y=1$, alors $x=\mathrm{i}$ et $z=-1$, donc $v_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. D'où le sous-espace propre $E_{(1-\mathrm{i})} = \mathrm{Ker}(A-(1-\mathrm{i})I_3)$ est la droite vectorielle complexe engendrée par le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

– On a $v_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à $\lambda_2 = 1-\mathrm{i}$, alors $A\,v_1 = \lambda_2\,v_1$; donc $A\,\overline{v}_1 = \overline{\lambda}_2\,\overline{v}_1$,
or $\overline{\lambda}_2 = \overline{1-\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i} = \lambda_3$, alors $A\,\overline{v}_1 = \lambda_3\,\overline{v}_1$; donc $\overline{v}_1 = w_1$ est un vecteur propre de A associé la valeur propre $\lambda_3 = 1+\mathrm{i}$. Soit $w_1 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, d'où le sous-espace propre $E_{(1+\mathrm{i})} = \mathrm{Ker}(A-(1+\mathrm{i})I_3)$ est la droite vectorielle complexe engendrée par le vecteur $w_1 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. La solution générale $X(t)$, puis touver la solution $X(t)$ satisfaisant la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$. On a $X'(t) = A\,X(t)$, alors

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} u_1 + \beta e^{\lambda_2 t} v_1 + \gamma e^{\lambda_3 t} w_1$$

où α, β et γ sont des paramètres à déterminer tels que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{t} e^{-\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma e^{t} e^{\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{2\,t} + \mathrm{i}\beta e^{t} e^{-\mathrm{i}t} - \mathrm{i}\gamma e^{t} e^{\mathrm{i}t} \\ \alpha e^{2\,t} + \beta e^{t} e^{-\mathrm{i}t} + \gamma e^{t} e^{\mathrm{i}t} \\ \alpha e^{2\,t} - \beta e^{t} e^{-\mathrm{i}t} - \gamma e^{t} e^{\mathrm{i}t} \end{pmatrix}$$

alors on obtient les trois expressions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \alpha e^{2\,t} + \mathrm{i}\beta e^{t} e^{-\mathrm{i}t} - \mathrm{i}\gamma e^{t} e^{\mathrm{i}t} \\ y(t) = \alpha e^{2\,t} + \beta e^{t} e^{-\mathrm{i}t} + \gamma e^{t} e^{\mathrm{i}t} \\ z(t) = \alpha e^{2\,t} - \beta e^{t} e^{-\mathrm{i}t} - \gamma e^{t} e^{\mathrm{i}t} \end{array}\right.$$

donc pour $t=0$, il vient

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = x(0) = \alpha + \mathrm{i}\beta - \mathrm{i}\gamma \\ \frac{1}{2} = y(0) = \alpha + \beta + \gamma \\ 3 = z(0) = \alpha - \beta - \gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

d'où $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\3\end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\mathrm{i} & \frac{1}{4}(1+\mathrm{i}) & \frac{1}{4}(-1+\mathrm{i})\\ \frac{1}{2}\mathrm{i} & \frac{1}{4}(1-\mathrm{i}) & -\frac{1}{4}(1+\mathrm{i})\end{pmatrix}$

d'où $\begin{cases}\alpha = \frac{7}{4}\\ \beta = -\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\mathrm{i}\\ \gamma = -\frac{5}{8}-\frac{3}{8}\mathrm{i}\end{cases}$

finalement, on obtient les solutions

$$\begin{cases} x(t) = \frac{7}{4}e^{2\,t} + \mathrm{i}\left(-\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\mathrm{i}\right)e^{t}e^{-\mathrm{i}t} + \mathrm{i}\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\mathrm{i}\right)e^{t}e^{\mathrm{i}t}\\ y(t) = \frac{7}{4}e^{2\,t} + \left(-\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\mathrm{i}\right)e^{t}e^{-\mathrm{i}t} - \left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\mathrm{i}\right)e^{t}e^{\mathrm{i}t}\\ z(t) = \frac{7}{4}e^{2\,t} - \left(-\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\mathrm{i}\right)e^{t}e^{-\mathrm{i}t} + \left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\mathrm{i}\right)e^{t}e^{\mathrm{i}t}\end{cases}$$

après un calcul élémentaire facile, en tenant compte des relations trigonométriques des nombres complexes, il vient

$$\begin{cases} x(t) = \frac{7}{4}e^{2\,t} - \frac{1}{4}e^{t}\left(3\cos(t)+5\sin(t)\right)\\ y(t) = \frac{7}{4}e^{2\,t} + \frac{1}{4}e^{t}\left(-5\cos(t)+3\sin(t)\right)\\ z(t) = \frac{7}{4}e^{2\,t} + \frac{1}{4}e^{t}\left(5\cos(t)-3\sin(t)\right)\end{cases}$$

on peut vérifier que pour $t=0$ on obtient $x(0)=1$, $y(0)=0.5$ et $z(0)=3$.

6. – Trouvons la solution $t \longmapsto X(t)$ tel que $X(0) = \begin{pmatrix}1\\\mathrm{j}\\\mathrm{j}^2\end{pmatrix}$ où $\mathrm{j} = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $\mathrm{j}^2 = e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. En effet, la démarche est similaire à la question 5, on cherchera α, β et γ vérifiant le système

$$\begin{cases} 1 = x(0) = \alpha + \mathrm{i}\beta - \mathrm{i}\gamma\\ \mathrm{j} = y(0) = \alpha+\beta+\gamma\\ \mathrm{j}^2 = z(0) = \alpha-\beta-\gamma\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}1\\\mathrm{j}\\\mathrm{j}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$$

d'où $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\mathrm{i} & \frac{1}{4}(1+\mathrm{i}) & \frac{1}{4}(-1+\mathrm{i})\\ \frac{1}{2}\mathrm{i} & \frac{1}{4}(1-\mathrm{i}) & -\frac{1}{4}(1+\mathrm{i})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{j}\\\mathrm{j}^2\end{pmatrix}$

d'où $\begin{cases}\alpha = -\frac{1}{2}\\ \beta = \frac{1}{4}\mathrm{i}(-3+\sqrt{3})\\ \gamma = \frac{1}{4}\mathrm{i}(3+\sqrt{3})\end{cases}$

donc

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}e^{2\,t} - \frac{1}{4}(-3+\sqrt{3})e^{t}e^{-\mathrm{i}t} + \frac{1}{4}(3+\sqrt{3})e^{t}e^{\mathrm{i}t}\\ y(t) = -\frac{1}{2}e^{2\,t} + \frac{1}{4}\mathrm{i}(-3+\sqrt{3})e^{t}e^{-\mathrm{i}t} + \frac{1}{4}\mathrm{i}(3+\sqrt{3})e^{t}e^{\mathrm{i}t}\\ z(t) = -\frac{1}{2}e^{2\,t} - \frac{1}{4}\mathrm{i}(-3+\sqrt{3})e^{t}e^{-\mathrm{i}t} - \frac{1}{4}\mathrm{i}(3+\sqrt{3})e^{t}e^{\mathrm{i}t}\end{cases}$$

après un calcul élémentaire, on obtient

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}e^{2\,t} + \frac{1}{2}e^{t}(3\cos(t)+\mathrm{i}\sqrt{3}\sin(t))\\ y(t) = -\frac{1}{2}e^{2\,t} + \frac{1}{2}e^{t}(-3\sin(t)+\mathrm{i}\sqrt{3}\cos(t))\\ z(t) = -\frac{1}{2}e^{2\,t} + \frac{1}{2}e^{t}(3\sin(t)-\mathrm{i}\sqrt{3}\cos(t))\end{cases}$$

– Soit M, N et P sont dans le plan complexe les images de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, montrons que le traingle MNP est équilatéral : en effet, le traingle MNP est équilatéral si et seulement si $\|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{MP}\| = \|\overrightarrow{NP}\|$ c'est à dire $|x(t) - y(t)| = |x(t) - z(t)| = |z(t) - y(t)|$. On a

$$\begin{array}{rcl} x(t) - y(t) & = & \frac{1}{2}e^t \left[3(\cos(t) + \sin(t)) + \mathrm{i}\sqrt{3}(\sin(t) - \cos(t))\right] \\ & = & \sqrt{3}\, e^t \left(\sin(t)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} + \cos(t)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right) \\ x(t) - z(t) & = & \frac{1}{2}e^t \left[3(\cos(t) - \sin(t)) + \mathrm{i}\sqrt{3}(\sin(t) + \cos(t))\right] \\ & = & \sqrt{3}\, e^t \left(\cos(t)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} - \sin(t)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right) \\ y(t) - z(t) & = & e^t \left[-3\sin(t) + \mathrm{i}\sqrt{3}\cos(t)\right] \\ & = & \sqrt{3}\, e^t \left(-\sqrt{3}\sin(t) + \mathrm{i}\cos(t)\right) \end{array}$$

on remarque que $|x(t) - y(t)| \neq |x(t) - z(t)| \neq |z(t) - y(t)|$, alors le traingle MNP n'est pas un triangle équilatéral.

$\square$

Exercice 7
Soit $(\mathcal{S})$ le systeme differentiel lineaire avec second membre

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) + 2y(t) + e^t \\ y'(t) & = & -3x(t) - 3y(t) + z(t) - e^t \\ z'(t) & = & 2x(t) + 2y(t) - z(t) + 2e^t \end{array} \right.$$

où x, y et z désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du systeme linéaire homogène associé à $(\mathcal{S})$.
2. Déterminer la solution particulière du système $(\mathcal{S})$ pour les conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ et $z(0) = 1$.
3. Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du système $(\mathcal{S})$.

Solution : Considérons le systeme differentiel linéaire avec second membre $(\mathcal{S})$ donné par

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) + 2y(t) + e^t \\ y'(t) & = & -3x(t) - 3y(t) + z(t) - e^t \\ z'(t) & = & 2x(t) + 2y(t) - z(t) + 2e^t \end{array} \right.$$

où x, y et z désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. La solution générale, à valeurs réelles, du systeme linéaire homogène associé à $(\mathcal{S})$: en effet, soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, alors le systeme differentiel linéaire avec second membre

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) + 2y(t) + e^t \\ y'(t) & = & -3x(t) - 3y(t) + z(t) - e^t \\ z'(t) & = & 2x(t) + 2y(t) - z(t) + 2e^t \end{array} \right.$$

est équivalent à l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d'où $X'(t) = A\,X(t) + e^t V_0$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

On s'intéresse à résoudre le système homogène issu du système $(\mathcal{S})$, à savoir que le système homogène $(\mathcal{S}_h)$ est donc $X'(t) = A\,X(t)$. Pour résoudre le système homogène $(\mathcal{S}_h)$, on va étudier la matrice A afin d'écrire la forme de la solution en se basant sur les techniques d'algèbre linéaire matricielle.

– le polynôme caractéristique associé à A est par définition $P_A(x) = \det(A - xI_3)$

$$\begin{aligned}\det(A - xI_3) &= \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ -3 & -3-x & 1 \\ 2 & 2 & -1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)(x+3)(x+1) - 4(x+1)\end{aligned}$$

d'où $P_A(x) = -(x+1)^3$. La matrice A a une unique valeur propre (-1) d'ordre de multiplicité 3.

– Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1, alors on a $A\,u = -u$, soit

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y = -x \\ -3x - 3y + z = -y \\ 2x + 2y - z = -z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y = 0 \\ -3x - 2y + z = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = -x \\ z = x \end{array}\right.$$

on prend $x = 1$, alors $y = -1$ et $z = 1$, donc $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où le sous-espace propre $E_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I_3)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

– Le sous-espace propre $E_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I_3)$ de A associé à la valeur (-1) de A est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $\dim(E_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I_3)) = 1 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$; donc A n'est pas diagonalisable ; par contre A est triangularisable au sens de Jordan ; d'où on peut trouver deux vecteurs v et w tels que $Av = -v + u_1$ et $Aw = -w + v$ de façon que le système $\{u_1, v, w\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur tel que $A\,v = -v + u_1$, alors

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y = -x + 1 \\ -3x - 3y + z = -y - 1 \\ 2x + 2y - z = -z + 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(x + y) = 1 \\ -3x - 2y + z = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{1}{2} - x \\ z = x \end{array}\right.$$

on prend $x = 0$, alors $y = \frac{1}{2}$ et $z = 0$, donc $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

De même, soit $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur tel que $A\,w = -w + v_1$, alors

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y = -x \\ -3x - 3y + z = -y + \frac{1}{2} \\ 2x + 2y - z = -z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(x + y) = 0 \\ -3x - 2y + z = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = -x \\ z = x + \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

on prend $x = 0$, alors $y = 0$ et $z = \frac{1}{2}$, donc $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

D'où le système $\{u_1; v_1; w_1\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A ; finalement on obtient la forme de Jordan de la matrice A :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En conclusion, la solution générale du système homogène $(\mathcal{S}_h)$ est $X_h(t) = \exp(tA)\,V$ où $V = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur à déterminer selon les conditions imposées à $t = 0$. D'où

$$X_h(t) = P\exp(tJ)\,P^{-1}V$$

On peut écrire la matrice J sous la forme $J = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente d'indice de nilpotence 3, à savoir que N^p est la matrice nulle pour tout $p \geq 3$. Or on a $\exp(tJ) = e^{-t}\exp(tN)$ et

$$\exp(tN) = I_3 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$X_h(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

c'est à dire que

$$X_h(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1+2t-t^2 & 2t & t+t^2 \\ -3t+t^2 & 1-2t & 1-t^2 \\ 2t-t^2 & 2t & 1+t+t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

explicitement, on écrit

$$\left\{\begin{array}{l} x_h(t) = e^{-t}\big(\alpha(1+2t-t^2) + 2\beta t + \gamma(t+t^2)\big) \\ y_h(t) = e^{-t}\big(\alpha(-3t+t^2) + \beta(1-2t) + \gamma(1-t^2)\big) \\ z_h(t) = e^{-t}\big(\alpha(2t-t^2) + 2\beta t + \gamma(1+t+t^2)\big) \end{array}\right.$$

où α, β et γ sont à déterminer selon les conditions imposées à $t = 0$.

2. Une solution particulière du système $(\mathcal{S})$: -1 est une veleur propre triple de A, alors une solution particulière s'écrit

$$X_p(t) = e^{-t}(V_0 + tV_1 + t^2V_2 + t^3V_3)$$

or on cherche une solution particulière vérifiant les conditions $x_p(0) = 1$, $y_p(0) = -1$ et $z_p(0) = 1$ à $t = 0$, alors on obtient $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$$X_p(t) = e^{-t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}\right]$$

3. La solution générale, à valeurs réelles, du système $(\mathcal{S})$ est $X(t) = X_h(t) + X_p(t)$; alors

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\left(\alpha(1+2t-t^2) + 2\beta t + \gamma(t+t^2)\right) + e^{-t}\left(1 + \alpha_1\, t + \alpha_2\, t^2 + \alpha_3\, t^3\right) \\ y(t) = e^{-t}\left(\alpha(-3t+t^2) + \beta(1-2t) + \gamma(1-t^2)\right) + e^{-t}\left(-1 + \beta_1\, t + \beta_2\, t^2 + \beta_3\, t^3\right) \\ z(t) = e^{-t}\left(\alpha(2t-t^2) + 2\beta t + \gamma(1+t+t^2)\right) + e^{-t}\left(1 + \gamma_1\, t + \gamma_2\, t^2 + \gamma_3\, t^3\right) \end{cases}$$

□